

• Εσωτερικός γινώμενος

Προσδιορισμός

Έστω V διανυσματικός χώρος / $\mathbb{R}$;

$e = (e_1, \dots, e_n)$ διάνυσμα. Θεωρούμε V και

$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ εσωτερικό γινώμενο

Έστω $u, w \in V$, τότε $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$,

$w = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$

$(\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R})$

Εκφράζουμε $\langle, \rangle$ διασπώντας $\langle u, w \rangle =$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \langle e_i, e_j \rangle$$

$\langle e_i, e_j \rangle (*)$

Από τη $\langle, \rangle$ καθορίζεται πλήρως από το

$\langle e_i, e_j \rangle \in \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, n$

~~εφόσον $\langle e_i, e_j \rangle \in \mathbb{R}$ για όλα τα i, j~~

~~Αν $n=1$~~

Με άλλα λόγια, οι τιμές $\langle e_i, e_j \rangle$ καθορίζουν έστω και $(*)$ το εσωτ. γινώμενο, δηλαδή αν γράψουμε το εσωτ. γινώμ. σε μία βάση το ~~εσωτ. γινώμ.~~ γράφεται πάντα

Πρόταση

Εστω $V \neq \{0_V\}$ δ. x επί το $\mathbb{R}$. η-
μερούμενος διανυσματ. Τότε υπάρχει τανό x-ομο-
ενα εσωτερικό γινόμενο στο V .

Απόδ

Από Πρόβ. Αλγ. I υπάρχει διανερούμενη
Βασ $e = (e_1, \dots, e_n)$ του V .

Ορίζουμε $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ως (γιν).

Εστω $u, w \in V$. Από e Βασ υπάρχει
μοναδικά $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ ώστε

$$u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

$$w = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n.$$

ορίζαμε

$$\langle u, w \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$$

Ακριβώς τα ίδια επιταχυνόμενα με την ηχητική
τα ταυίκα εσωτερικά γινόμενα στο $\mathbb{R}$
δίνουν ότι $\langle, \rangle$ εσωτ. γινόμενο στο V .

Πρόταση

Ορισμός

~~Εστω $(V, \langle, \rangle)$ x. E Γ και $g_1, \dots, g_p \in V$~~

με $g_i \neq 0_V$

Για κάθε $i = 1, \dots, p$. Λέμε ότι τα g_i είναι
ορθογώνια ανά δύο αν

$$\langle g_i, g_j \rangle = 0 \quad \forall \quad i \neq j$$

(δ.γ. g_i, g_j κάθετα $\forall i \neq j$)

π.χ Έστω $\mathbb{R}^3$ με το γνωστό εσωτερικό γινόμενο
τα διανύσματα

$g_1 = (1, 0, 0), g_2 = (0, 1, 0), g_3 = (0, 0, 1)$
είναι ορθογώνια ανά δύο (παρὰλλέλαια).

Πρόταση

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Ευκλείδειος χώρος και
 $g_1, \dots, g_p \in V \setminus \{0_V\}$ p μη μηδενικά δι-
ανύσματα ορθογώνια ανά δύο. Τότε τα
 $g_1, \dots, g_p$ είναι γραμ. ανεξάρτητα.

Απόδειξη

Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_p g_p = 0_V$ (1)

Παίρνοντας εσωτ. γινόμενο με το g_i , έχουμε

$$(1) \Rightarrow \langle \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_p g_p, g_i \rangle = \langle 0_V, g_i \rangle =$$

0 ή $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 \langle g_1, g_i \rangle + \lambda_2 \langle g_2, g_i \rangle + \dots + \lambda_p \langle g_p, g_i \rangle}_{= 0 \text{ ή } \mathbb{R}}$$

$\Downarrow$

$$\lambda_i \langle g_i, g_i \rangle = 0 \text{ ή } \mathbb{R} \quad (2)$$

Από $\langle \cdot, \cdot \rangle$ διακρίνουμε και $g_i \neq 0_V$

$$\Rightarrow \langle g_i, g_i \rangle \in \mathbb{R} \text{ δια } (2) \Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ ή } \mathbb{R}$$

Λαμβάνοντας τα g_1, g_p είναι γραμ. ανε-
ξάρτητα

Οπότε

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Ευκλείδειος χώρος και

$e = (e_1, \dots, e_n)$ διατ. βάση του V . Η βάση e ονομάζεται ορθοκανονική αν $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R} & \text{αν } i \neq j \\ 1 \in \mathbb{R} & \text{αν } i = j \end{cases}$

Με άλλα λόγια μια βάση είναι ορθοκανονική αν τα διανύσματα είναι ορθογώνια ανά δύο και το μήκος κάθε διανύσματος (στοιχείου της βάσης) είναι ίσο με 1.

Π.χ

Στον $\mathbb{R}^n$ η το συνήθως εσωτερικό γινόμενο, τα διανύσματα και $e = (e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1))$ η κανονική βάση. Η βάση αυτή είναι ορθοκανονική.

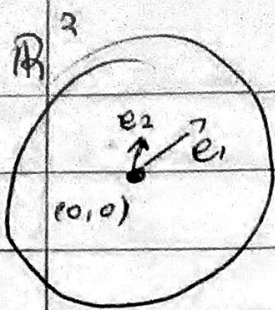
Απόδειξη

$$\text{Αν } i \neq j \quad \langle e_i, e_j \rangle = \langle (0, \dots, 0, \overset{i\text{οςος}}{1}, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Αν } i = j \quad \langle e_i, e_j \rangle = 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 = 1 \in \mathbb{R}$$

Ερώτηση

Θεωρούμε τον $V = \mathbb{R}^2$ και το κανονικό εσωτερικό γινόμενο (όποτε η ερώση καθορίζεται και μήκος είναι η συνήθης). Βρείτε όλες ορθοκανονικές βάσεις του V .



Λύση

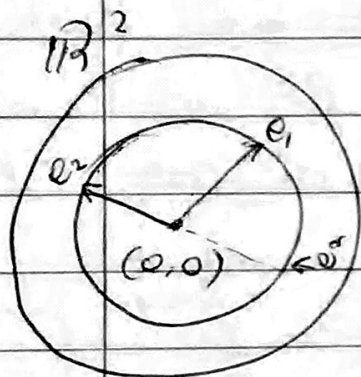
Επιλέγουμε $e_1 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ με
 $\|e_1\| = 1$ δηλ $a^2 + b^2 = 1$

Τότε το e_2 (και ακριβώς δύο επι-
 λογές), ώστε (e_1, e_2) ορθοκαν. βάση του

$\mathbb{R}^2$.

Γεντ. e_3 στον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο
 το $O_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ και στην ευθεία ευθεία
 στην ευθεία να οριστεί το e_1

Αντ. $e_2 = (-b, a)$ ή $e_2 = (b, -a)$



Σημείωση

Το $\mathbb{R}^2$ και γενικότερα
 n-διάστατες διανυσματικές ορθοκανω-
 νικές βάσεις και τις εκάστη
 έχει μία

Αλγόριθμος (ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt)

Έστω $(V, \langle \rangle)$ ΧΕΓ και $g = (g_1, \dots, g_n)$ βάση
 του V . Ο Αλγόριθμος κατασκευάζει (επαναληπτικά
 ως προς την g) ορθοκανονική βάση $e = (e_1, e_n)$
 του V

Βήμα 1ο

Κατασκευάζει στοιχικά Βασιστικές Βάσεις
 $h = (h_1, \dots, h_n)$ του V με την ιδιότητα $\langle h_i, h_j \rangle =$
 $0_{\mathbb{R}}$

για $i \neq j$

Ορίζουμε

$$h_1 = g_1$$

$$h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} h_1$$

Ευκολος υπολογισμος

$$\langle h_2, h_1 \rangle = \langle g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} h_1, h_1 \rangle =$$

$$= \langle g_2, h_1 \rangle - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} \langle h_1, h_1 \rangle = 0 \text{ (B.)}$$

Ενις ευκολο ο υπολογισμος του V που παρα-
γουν τα ~~g_1, g_2~~ h_1, h_2 ειναι ισοι με του
υποχωρο που παραγουν τα g_1, g_2

$$h_3 = g_3 - \frac{\langle g_3, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} h_1 - \frac{\langle g_3, h_2 \rangle}{\|h_2\|^2} h_2$$

$$h_4 = g_4 - \sum_{i=1}^3 \frac{\langle g_4, h_i \rangle}{\|h_i\|^2} h_i$$

Υποθετουμε $h_1, h_2, \dots, h_p$ εχουν οριστι. Οριζουμε

$$h_{p+1} = g_{p+1} - \sum_{i=1}^p \frac{\langle g_{p+1}, h_i \rangle}{\|h_i\|^2} h_i$$

Παρατηρηση

(i) (χαρις αναδιηγη) καθε h_i ειναι ~~οριζτιος~~

μη μηδενικο ανα οριζεται καθε

(*) (ii) $\langle h_i, h_j \rangle = 0$ οταν $i \neq j$

(iii) $h_1, \dots, h_n$ βαση του V

Βήμα 2.

$$\text{για } i=1, \dots, n \text{ θέτουμε } e_i = \frac{h_i}{\|h_i\|}$$

Τοιχοποις $e_1, \dots, e_n$ ορθοκανονικη βάση του V
Από

$$\begin{aligned} \text{Από (*) i) } e_i \text{ το } \perp \text{ οριζοντιο. Από (ii)} \\ \text{για } i \neq j \langle e_i, e_j \rangle = \langle \frac{h_i}{\|h_i\|}, \frac{h_j}{\|h_j\|} \rangle = \\ = \frac{1}{\|h_i\| \|h_j\|} \langle h_i, h_j \rangle = 0 \text{ Απο } e_1, \dots, e_n \text{ } \perp \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τον ορθοκανονικη βάση του V .
 Απο $e_1, \dots, e_n$ για $\dim V = n$
 $\Rightarrow e_1, \dots, e_n$ βάση του V .

$$\text{Τέλος } \langle e_i, e_i \rangle = \langle \frac{g_i}{\|g_i\|}, \frac{g_i}{\|g_i\|} \rangle = \frac{1}{\|g_i\|^2} \langle g_i, g_i \rangle =$$

$= 1$. Απο $e_1, \dots, e_n$ ορθοκανονικη βάση του V .

Π.Χ

Εφαρμογή Αλγορίθμου Gram-Schmidt, στο $\mathbb{R}^3$ με
 το κανονικο εσωτερικη γινόμενο και INPUT βάση
 $g = (g_1 = (1, 1, 0), g_2 = (2, 0, 1), g_3 = (2, 2, 1))$

Βήμα 1^ο

$$h_1 = g_1 = (1, 1, 0)$$

$$h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} h_1 = (2, 0, 1) - \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} (1, 1, 0)$$

$$(1, -1, 0)$$

$$= (2, 0, 1) - \frac{2}{2} (1, 1, 0) = (1, -1, 1)$$

$$\begin{aligned} h_3 &= g_3 - \frac{\langle g_3, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} h_1 - \frac{\langle g_3, h_2 \rangle}{\|h_2\|^2} h_2 = \\ &= (2, 2, 1) - \frac{4}{2} (1, 1, 0) - \frac{1}{3} (1, -1, 1) \\ &= \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Basis 2

$$e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$e_3 = \frac{h_3}{\|h_3\|} = \frac{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{6}{9}}}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \quad \text{Apă } (e_1, e_2, e_3) \text{ operăm în } \mathbb{R}^3$$

nx

Considerăm $V = \mathbb{R}$ în care avem două operații definite astfel:

$$\langle u, w \rangle = u \cdot w \quad \text{pentru } u, w \in \mathbb{R}$$

1) A.0. pentru $u \in \mathbb{R}$, $\|u\| = |u|$ ← norma obișnuită este definită

$$\begin{cases} u \text{ cu } u \geq 0 \text{ în } \mathbb{R} \\ -u \text{ cu } u < 0 \text{ în } \mathbb{R} \end{cases}$$

2)

Definim cele două operații de înmulțire în V

Amplasăm

$$1) \text{ Considerăm } u \in \mathbb{R}, \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u^2} = |u|$$

i) Από $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$, κάθε ορθοκανονική βάση του V
 έχει 1 στοιχείο. Αν e_1 ορθοκ βάση, από το
 $\perp$) $\|e_1\| = 1_{\mathbb{R}} \Rightarrow \|e_1\| = 1_{\mathbb{R}} \Rightarrow e_1 = 1_{\mathbb{R}} \text{ ή } -1_{\mathbb{R}}$

Αντιστοιχεί το $1_{\mathbb{R}}$ ορθοκν βάση του V
 αντισ το $-1_{\mathbb{R}}$ ορθοκν βάση του V . Επομένως
 θα πάρει όλες τις ορθοκν βάσεις του V .

Παρατηρήσεις

$A_V < > \quad (\text{το εσωτερικό γινόμενο στο } V_{\mathbb{R}}) \quad V = \mathbb{R}$

Για $\langle u, w \rangle = 2016 \cdot u \cdot w$

~~Οι~~ Οι ορθοκανονικές βάσεις του $(V, \langle \rangle_1)$ είναι

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2016}}$$

$$e_1 = -\frac{1}{\sqrt{2016}}$$